UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Examen Final 26/07/2023

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

P1	P2	P3	P4		T1		T2		CALIFICACIÓN
			a	b	a	b	a	b	

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto, con al menos 2 bien entre las actividades P1, P2, P3 y P4 y al menos 1 bien entre las actividades T1 y T2.

P1) Las componentes que se encuentran en un depósito, pueden provenir de dos plantas (I y II). Se sabe que la producción de la planta I triplica la de la planta II. La duración de las mismas se distribuyen exponencialmente de manera tal que las que provienen de la planta I duran en promedio 1000hs y de las que vienen de la planta II, se sabe que el 28,65% dura más de 1000hs. Si se elige al azar una componente del depósito y dura más de 500hs ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la planta II?

P2) La longitud de ciertas varas de acero se distribuye normalmente. Se tomó una muestra de 16 varas con la que se construyó un IC para σ^2 al 95% y se obtuvo como límite superior el número 9,5814. Determinar el valor del desvío muestral y el límite inferior de dicho intervalo.

P3) Según un estudio realizado, la proporción de personas extranjeras que estudian en las universidades argentinas está por debajo del 4%. Se consideró una muestra aleatoria de 400 estudiantes entre los cuales se observaron 8 estudiantes extranjeros. ¿Con qué niveles de significación podría avalarse la conclusión del estudio realizado?

P4) Se tomó una muestra aleatoria de 10 observaciones de óxidos de azufre (SO2), en ppm, provenientes de una fundición, la que arrojó una media de 57,41(ppm) con un desvío de 0,94(ppm).

- **a-** Con los datos proporcionados y un $\alpha = 0{,}05$ ¿podría avalarse la hipótesis de que el valor medio de óxido de azufre (en ppm) supera 57?
- **b-** Calcular la probabilidad de rechazar que $\mu = 57(ppm)$cuando en realidad $\mu = 58(ppm)$,considerando un nivel de significación del 5% y la muestra seleccionada.

T1) a- Definir estimador puntual y enunciar al menos dos características de un "buen" estimador.

- **b-** Sea $X = N(\mu;\sigma)$ y sea $\{X_1;X_2\}$ una muestra aleatoria de X. Decidir cuál es el mejor de los siguientes estimadores de μ. Justificar.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2X_1+3X_2}{5} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1+2X_2}{3}$$

T2) a- Definir p-Valor y Potencia de un test.

- **b-** Se acusa a una empresa de discriminación en sus prácticas de contratación. En el juicio, un jurado comete un error tipo II al determinar que la empresa es inocente. Escriba las hipótesis nula y alternativa que se plantearon y justifique su respuesta.

Final	Probab. y estadística	HOJA N° 1 / FECHA 26-7-23

E1 Definir estimador puntual y enunciar, al menos,
a) dos características de un "buen" estimador.

Un estimador puntual es una variable aleatoria que se utiliza para estimar (aproximar) el valor de un parámetro de otra variable aleatoria.

Debe ser → consistente : $\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

→ insesgado : $E(\hat{\theta}) = \theta$

b) Sea $X \sim N(\mu,\sigma)$ y sea $(X_1 ; X_2)$ una muestra aleatoria de X. Decidir cuál es el mejor de los sig. estimadores de μ. Justificar

$\hat{\mu}_1 = \dfrac{2X_1+3X_2}{5}$ $\qquad \hat{\mu}_2 = \dfrac{X_1+2X_2}{3}$ $\qquad X \sim N(\mu,\sigma)$, $E(X_i)=\mu$

$$E(\hat{\mu}_1)-\mu = E\left(\frac{2X_1+3X_2}{5}\right)-\mu = \frac{1}{5}E(2X_1+3X_2)-\mu =$$
$$= \frac{2}{5}\underbrace{E(X_1)}_{\mu}+\frac{3}{5}\underbrace{E(X_2)}_{\mu}-\mu = \frac{2}{5}\mu+\frac{3}{5}\mu-\mu = 0 \checkmark$$

$\hat{\mu}_1$ es insesgado

$$E(\hat{\mu}_2)-\mu = E\left(\frac{X_1+2X_2}{3}\right)-\mu = \frac{1}{3}E(X_1+2X_2)-\mu = \frac{E(X_1)}{3}+\frac{2}{3}E(X_2)-\mu$$
$$= \frac{\mu}{3}+\frac{2}{3}\mu-\mu = 0$$

$\hat{\mu}_2$ es insesgado

Hallo las varianzas

$$V(\hat{\mu}_1) = V\left(\frac{2X_1+3X_2}{5}\right) \stackrel{?}{=} \frac{4}{25}\overbrace{V(X_1)}^{\sigma^2}+\frac{9}{25}\overbrace{V(X_2)}^{\sigma^2} = \boxed{\frac{13}{25}\sigma^2 = V(\hat{\mu}_1)}$$

$$V(\hat{\mu}_2) = V\left(\frac{X_1+2X_2}{3}\right) = \frac{\overbrace{V(X_1)}^{\sigma^2}}{9}+\frac{4}{9}\overbrace{V(X_2)}^{\sigma^2} = \boxed{\frac{5}{9}\sigma^2 = V(\hat{\mu}_2)}$$

$$\overbrace{\frac{5}{9}}^{0,555} > \overbrace{\frac{13}{25}}^{0,52} \Rightarrow V(\hat{\mu}_1) > V(\hat{\mu}_2) \Rightarrow \boxed{\text{Se elige } \hat{\mu}_2}$$

NOTA

$\boxed{T2}$ a) Definir p-valor y potencia de un test

p-valor: muestra la probabilidad de haber obtenido el resultado que hemos obtenido suponiendo que Ho es cierta

Potencia del test: es la probabilidad de rechazar Ho cuando Ho es falsa

b) Se acusa a una empresa de discriminación en sus prácticas de contratación

En el juicio, un jurado comete un error tipo II al determinar que la empresa es inocente.

Escribe las hipótesis nula y alternativa que se plantearon y justificar la respuesta

Ho: La empresa NO discrimina vs H1: La empresa discrimina

Error tipo II = Aceptar Ho cuando Ho es falsa

con el error tipo II se acepta Ho que, para lo que dice el enunciado representa que la empresa NO discrimina (dice que es inocente), por eso elegí esa Ho

NOTA

Final | Probabilidad y estadística | HOJA N° 2 | FECHA 26-7-23

(P1) Las componentes que se encuentran en un depósito pueden provenir de dos plantas (I y II)

Se sabe que la producción de la planta I triplica la de la planta II.

La duración de las mismas se distribuyen exponencialmente de manera tal que las que provienen de la planta I duran en promedio, 1000 hs y de las que vienen de la planta II se sabe que el 28,65% duran más de 1000 hs.

Si se elige al azar una componente del depósito y dura más de 500 hs ¿cuál es la prob. de que provenga de la planta II?

A: "la componente seleccionada al azar proviene de la planta I"

B: " " " " " " " " planta II"

$\underbrace{P(A)+P(B)=1}_{①}$, $\underbrace{P(B)=3P(A)}_{②}$ $\Rightarrow$ ① y ② $4P(A)=1$

$P(A)=0,25 \rightarrow P(B)=0,75$

X: "duración, en horas, de la componente elegida al azar"

$E(X|A)=1000=\frac{1}{\lambda} \rightarrow \boxed{X|A \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)}$

$P(X>1000|B)=0.2865 \rightarrow P(X\leq 1000|B)=0,7135$

$P(X\leq 1000|B) \underset{\sim \mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})}{=} 1-e^{-\lambda 1000}=0,7135 \Rightarrow 0,2865=e^{-\lambda 1000}$

$\ln(0,2865)=-\lambda 1000$

$X|B \sim \mathcal{E}\left(\frac{1.25}{1000}\right) \leftarrow \lambda=\frac{-\ln(0,2865)}{1000}=1,25\times 10^{-3}$

Hallo las prob. de que las comp. duren más de 500 hs

$P(X>500|A)=1-P(X\leq 500|A)=1-\left(1-e^{\frac{-500}{1000}}\right)=0,6065$

$P(X>500|B)=1-P(X\leq 500|B)=1-\left(1-e^{-\frac{500\times 1,25}{1000}}\right)=0,5352$

$P(B|X>500)=\frac{P(X>500|B)\,P(B)}{P(X>500|B)\,P(B)+P(X>500|A)\,P(A)}=$

$=\frac{0,5352\cdot 0,75}{0,5352\times 0,75+0,6065\times 0,25}=\boxed{0,7258=P(B|X>500)}$

NOTA

P2) La longitud de ciertas varas de acero se distribuye normalmente.

Se tomó una muestra de 16 varas con la que se construyó un IC para σ^2 al 95% y se obtuvo como límite superior el número: 9,5814

Determinar el valor del desvío muestral y el límite inferior de dicho intervalo

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

donde: $n = 16 \Rightarrow n-1 = 15$

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \;, 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$

Entonces: $9,5814 = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}$

$$\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{15,\,0.975} = 6,262$$

$$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{15,\,0.025} = 27,488$$

$$\Rightarrow 9,5814 = \frac{15 \cdot S^2}{6,262} \rightarrow S^2 = 4 \rightarrow \boxed{S = 2}$$ desvío muestral

$$\text{límite inferior} = \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} = \frac{15 \times 4}{27,488} = \boxed{2,1828 = \text{lim. inf}}$$

NOTA

Final	Prob. y estadística	HOJA N° 3 FECHA 26-7-23

(P3) Según un estudio realizado, la proporción de personas extranjeras que estudian en las universidades argentinas está por debajo del 4%

Se consideró una muestra aleatoria de 400 estudiantes entre los cuales se observaron 8 estudiantes extranjeros.

¿Con qué niveles de significación podría avalarse la conclusión del estudio realizado?

$n = 400$

$\hat{p} = \frac{8}{400} = 0.02$

$H_0: p = 0.04$ vs $H_1: \overbrace{p < 0.04}^{\text{estudio realizado}}$

$e_m = \frac{p - 0.04}{\sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{400}}} = \frac{p - 0.04}{0,01}$

Rechazo Ho si $Z_{obs} < z_\alpha$

Se rechaza Ho $\Rightarrow Z_{obs} < z_\alpha$

$Z_{obs} = \frac{0,02 - 0.04}{0.01} = -2$

$z_\alpha > -2$ $\quad$ $z_{-2,00} = 0,0228 \rightarrow \boxed{\alpha > 0,0228}$

NOTA

P4) Se tomó una muestra aleatoria de 10 observaciones de óxido de azufre (SO_2) en ppm provenientes de una fundición la que arrojó una media de 57,41 (ppm) con un desvío 0,94 ppm

a) Con los datos proporcionados y $\alpha = 0.05$ ¿podría avalarse la hipótesis de que el valor medio de óxido de azufre en ppm supera 57?

$n = 10$

$\bar{X} = 57{,}41$

$S = 0{,}94$ ← es muestral

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \mu = 57$ vs $H_1: \mu > 57$ (es lo que se quiere probar)

$$e_m = \frac{\bar{X} - 57}{\frac{0{,}94}{\sqrt{10}}} \sim t_9 \text{ bajo } H_0$$

Rechazo H_0 si $T_{obs} > t_{9,\,0.05}$

$$T_{obs} = \frac{57{,}41 - 57}{0{,}94/\sqrt{10}} = 1{,}3793$$

$t_{9,\,0.05} = 1{,}833$

$T_{obs} < t_{9,\,0.05}$

No rechazo H_0

No existen evidencias para avalar la hipótesis de que el SO_2 supera los 57 ppm

b) Calcular la probabilidad de rechazar que $\mu = 57$ ppm cuando, en realidad, $\mu = 58$ ppm considerando $\alpha = 0.05$ y la muestra seleccionada

$$P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}) = P\left(\frac{\bar{X} - 57}{0{,}94/\sqrt{10}} < 1{,}833 \mid \mu = 58\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 57 - 1 + 1}{0{,}94/\sqrt{10}} > 1{,}833 \mid \mu = 58\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 58 + 1}{0{,}94/\sqrt{10}} > 1{,}833 \mid \mu = 58\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 58}{0{,}94/\sqrt{10}} > 1{,}833 - \frac{1}{0{,}94/\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X} - 58}{0{,}94/\sqrt{10}}}_{\sim t_9 \text{ bajo } H_0 \text{ con } \mu = 58} > -1{,}5311\Bigg) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 58}{0{,}94/\sqrt{10}} < -1{,}5311\right) = 1 - 0{,}08 = 0.92$$

NOTA